Lange Nacht der Mathematik

24./25. November 2017
Aufgaben 111213 1. Runde

Liebe Teilnehmer an der „Langen Nacht der Mathematik“, ihr freut euch darauf, in dieser Nacht an Aufgaben zu knobeln und zu versuchen, mit logischem Denken, mit geometrischem Vorstellungsvermögen, mit schnellem und richtigem Rechnen und Pfiffigkeit einigen Problemen zu Leibe zu rücken. Dazu sind Ausdauer und Hartnäckigkeit vonnöten. Ihr arbeitet in Gruppen bis zu vier Personen an den folgenden Aufgaben. Bitte achtet darauf, dass jede Aufgabe zunächst von jedem einzelnen Gruppenteilnehmer bearbeitet und eine Lösung entwickelt wird. Dann tauscht ihr eure Ergebnisse in der Gruppe untereinander aus, einigt euch auf eine Lösung und schreibt sie mit der Herleitung und allen Begründungen in euer Heft. Es ist Ehrensache, dass ihr die Aufgaben löst und nicht die Erwachsenen. Mit einem Taschenrechner oder Abschreiben/Kopieren aus dem Internet kann aber kein Beweis geführt werden. Bei Verständnisproblemen in der Aufgabenstellung diskutiert ihr untereinander. Sollten die Erwachsenen Fragen haben, gibt es für sie eine *Hotline*. Um in die nächste Runde zu kommen, müssen genügend Aufgaben richtig gelöst werden. In der dritten Runde schickt ihr eure Ergebnisse einschließlich eures Lösungsweges via Internet an uns ein. Es kann sein, dass ihr in der letzten Runde aufgefordert werdet, den Lösungsweg einzelner Aufgaben aus der ersten oder zweiten Runde einzuschicken.

Als Antworttyp gibt es:

$\mathbb{N}$ heißt: natürliche Zahlen (einschließlich der Null),
$\mathbb{Z}$ heißt: ganze Zahlen,
$\mathbb{Q}$ heißt: gekürzte Brüche, z. B. 3/7,
$\mathbb{R}$ heißt: in Kombination mit pi; e; i; ... , z.B. 2w(3;5)i für $2 \cdot \sqrt[3]{5} \cdot i$,
$\mathbb{R}(5)$ heißt: Dezimalbruch gerundet auf 5 Stellen, z. B.: -321,01234,
Wort(4) heißt: Zeichenfolge mit 4 Zeichen, z. B. 7+ab.
Zeitangaben sind im Format dd:hh:mm:ss je nach Genauigkeit gefordert.
Im Allgemeinen ist eine Stellenanzahl nicht gegeben.
Lösungsmengen können mit einem Intervall angegeben werden,
z.B.: $[4;w(3;7)],[-5;9),\ldots$.

Viel Erfolg!

Aufgabe 1.1: Summen nur mit 1en und 2en

Die Zahl 4 kann auf fünf verschiedene Weisen als Summe von 1en und 2en dargestellt werden:

$$1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=2+2$$

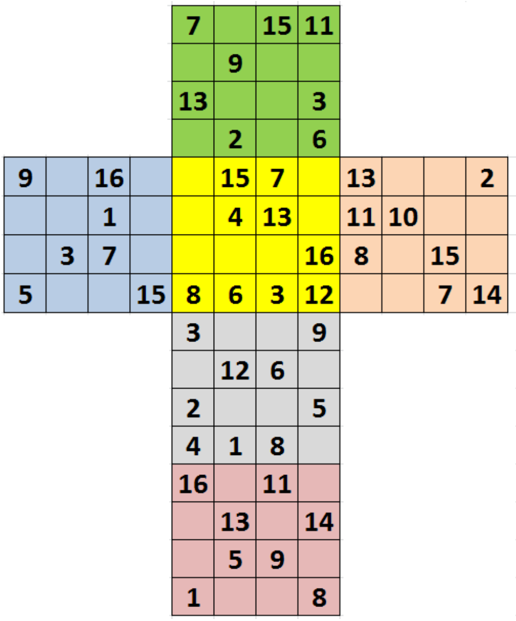
Wenn A_n die Anzahl der verschiedenen Darstellungsweisen der natürlichen Zahl n sei, dann untersuche diese Funktion:

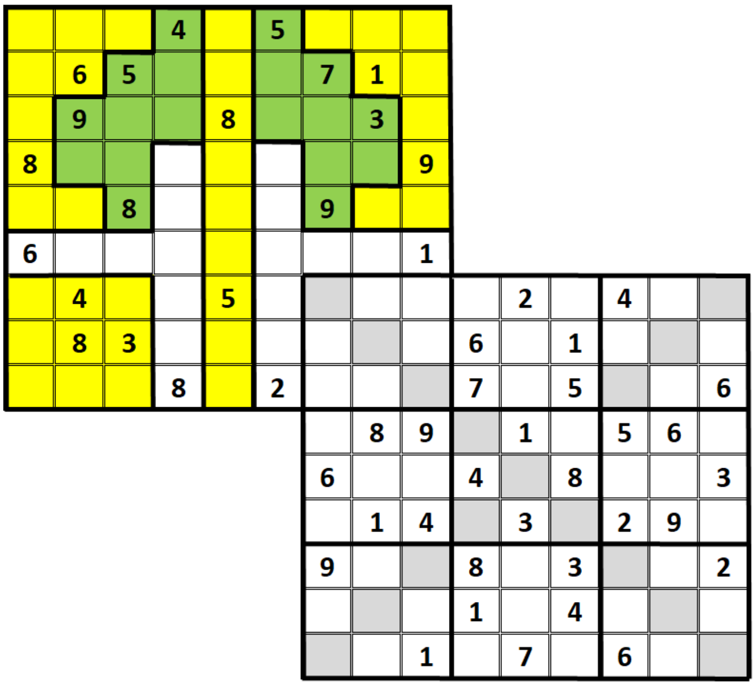
n	1	2	3	4	5	6	7
A_n				5			

,
leite daraus eine Gesetzmäßigkeit her und bestimme A_{23}.
(Ein Beweis für die Richtigkeit einer Formel wird diesmal nicht verlangt.)

Antworttyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 1.2: Sudoku & Co





Der Hexaeder besitzt 6 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten. Auf jeder Fläche soll jede Zahl von 1 bis 16 genau einmal vorkommen. Es gibt 12 Streifen, die um den Hexaeder herumlaufen; in jedem Streifen soll auch jede Zahl genau einmal vorkommen.
Wie groß ist die kleinste Eckenzahl (Summe von drei Zahlen)?
Wie groß ist die größte Kantenzahl (Summe von 8 Zahlen)

Beide Sudokufelder sollen ausgefüllt werden mit genau einer der Zahlen von 1 bis 9. In jeder Neuner-Zeile als auch jeder Neuner-Spalte soll jede der Zahlen genau einmal vorkommen. Außerdem darf auf beiden Diagonalen des unteren Sudokufeldes jede Zahl nur genau einmal vorkommen.
Wenn die einziffrigen Zahlen anschließend so ersetzt werden: 1-W; 2-D, 3-N; 4-A; 5-I; 6-L; 7-F; 8-M; 9-Z, dann ergeben sich in den 153 Kästchen, waagerecht oder senkrecht oder diagonal, vorwärts oder rückwärts, sinnvolle deutsche Wörter/Begriffe, denen jeweils ein (deutscher) SCRABBLE-Wert zugeordnet werden kann.
Gesucht ist der höchste dieser Werte.

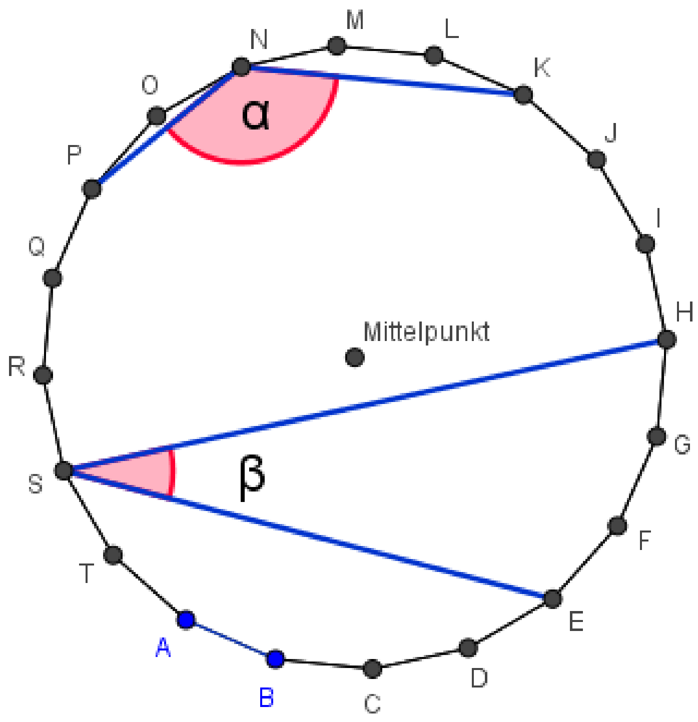
1 Punkt: E , N , S , I , R , T , U, A , D
2 Punkte: H , G , L , O
3 Punkte: M , B , W , Z
4 Punkte: C , F, K , P
6 Punkte: Ä , J , Ü , V
8 Punkte: Ö , X
10 Punkte: Q , Y
0 Punkte: Joker/Blanko

Lösungstyp: $\mathbb{N};\mathbb{N};\mathbb{N}$

Aufgabe 1.3: Winkel im Kreis

On the circle shown at the right are marked the vertices of a regular 20-sided polygon A.

How big are the measures for α and β?



Lösungstyp: $\mathbb{N};\mathbb{N}$

Aufgabe 1.4: Sechzehn Zahlen

In der Tabelle

0	1	2	…	k	…	15
16	17	18	…	k+16	…	31
32	33	34	…	k+32	…	47
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
240	241	242	…	k+240	…	255

der ersten 256 natürlichen Zahlen werden sechzehn Zahlen derart ausgesucht, dass keine zwei in derselben Zeile oder derselben Spalte stehen.
Wie groß ist die größtmögliche Summe dieser sechzehn Zahlen?

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 1.5: Noch mehr Lösungen

Til hat durch Zufall drei Lösungen von $x^3 = 1$ durch Multiplizieren zweier Terme erhalten

$$\left(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{-3}}{2}\right)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{-3}}{2}\right) = 1.$$

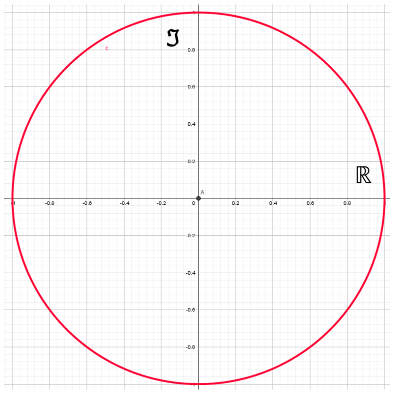
Die dritte (eigentlich die erste) hatte er mit $x_1 = 1$ ja schon.

Nun weiß Til, dass ein Term wie $\sqrt{-1}$ nicht den bisherigen Regeln entspricht. Deswegen findet er mit $i^2 = -1$ einen „Trick“, um diesem Dilemma zu entkommen.
Anschließend entdeckte er, dass alle drei Lösungen auf einem Einheitskreis um den Ursprung liegen, wenn man die einzelnen Summanden der drei Lösungen

$$x_1 = 1+0\cdot i; \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\cdot i; \qquad x_3 = -\tfrac{1}{2}-\tfrac{3}{2}\cdot i$$

getrennt als $\mathbb{R}$- bzw. $\mathbb{I}$-Wert interpretiert .

Til betrachtet die Winkel zwischen den einzelnen Lösungen auf dem Einheitskreis und wendet seine Entdeckung auf die Gleichung $x^8 = 1$ an, bei der er acht Lösungen erwartet.



Wie groß ist der Winkel und wie lauten die reellen Brüche, die in den einzelnen Summanden auftreten?

(Die Brüche (ebenso die ganzen Zahlen) sollen – „auf den Hauptnenner gebracht “– aufsteigend nach der Größe sortiert werden. Gesucht sind die Zähler dieser Brüche in derselben Ordnung.)

Antworttyp: $\mathbb{R}(1);\mathbb{R};\ldots$

Aufgabe 1.6: Ein Draht

Ein Draht von 25 cm Länge soll so zerschnitten werden, dass aus dem einen Stück ein Quadrat und aus dem anderen Stück ein gleichseitiges Dreieck gebogen werden kann.
Wie muss die ursprüngliche Drahtlänge zerschnitten werden, damit die Summe der geformten Flächeninhalte minimal wird?
(Gesucht ist die Länge des längeren Drahtstücks.)

Antworttyp: $\mathbb{R}(1)$

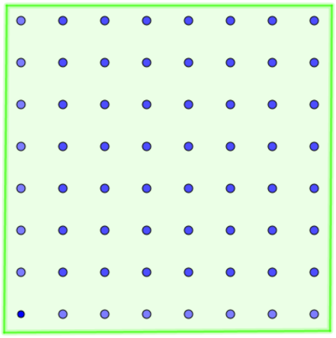
Aufgabe 1.7: Quersummen

Gesucht ist eine vierstellige Zahl x. Wenn man die Ziffern der Quersumme y von x umdreht (Bsp.: $28 \rightsquigarrow 82$) und diese neue Zahl z mit y multipliziert, erhält man wieder x.

Lösungstyp: $\mathbb{N};\mathbb{N}$

Aufgabe 1.8: 7x7-Geobrett (euklidisch)

Auf einem 7x7-Geobrett sollen mit einem Gummiband verschiedene Rhomben gespannt werden. Die Rhomben unterscheiden sich in der Seitenlänge und in der Länge der größeren Diagonale.
Fertige eine Tabelle an und bestimme für jeden Typ die Anzahl. (Eine Beispieltabelle siehst du rechts; dabei soll w2 „Wurzel aus 2“ bedeuten.)



n x n-Quadrat		
Anzahl	Seitenlänge	gr. Diagonale
	1	w2

Gesucht ist die Summe der einzelnen Anzahlen.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

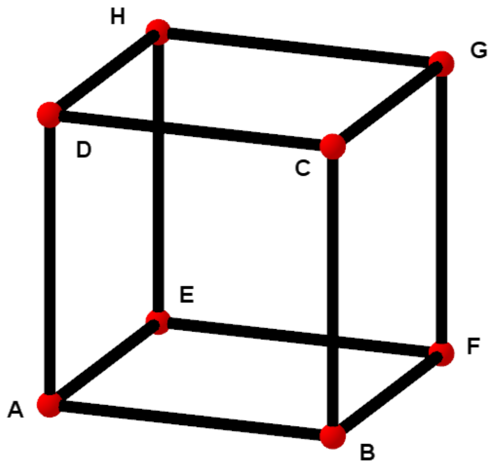
Aufgabe 1.9: Drei Summen

Wilfried addiert alle achtstelligen geraden Zahlen und anschließend berechnet er die Summe aller achtstelligen durch 7 teilbaren Zahlen sowie die Summe jener achstelligen Zahlen, bei denen die erste und letzte Ziffer gleich ist.
Gesucht ist die Summe der drei Summen?

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 1.10: Hamsterweg

Hamster Emil startet in Punkt A eines Hexaeders und läuft von einer Ecke zur anderen. An jeder Ecke entscheidet er zufällig, wohin er läuft.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er nach fünfmaligem Laufen im Punkt G landet?



Lösungstyp: $\mathbb{Q}$

Wenn jede teilnehmende Schule uns fünf bis zehn Euro spendete, wäre uns sehr geholfen.
Stichwort *Mathenacht*
Kontoinhaber: MaWeSH e.V.
Kreditinstitut: Sparkasse Lübeck
IBAN: DE 18 2305 0101 0160 0413 56