Aufgabe 2.1: Dreieck

Von einem Dreieck Δ_{ABC} sei die Seite $\overline{AB} = c = 14$ cm gegeben, die durch den Fußpunkt des Innenkreisradius im Verhältnis 3:4 geteilt wird.

Falls die folgenden Formeln nicht bekannt sind, seien sie hier angegeben:
$A_\Delta = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$ mit $s = \frac{a+b+c}{2}$.
$A_\Delta = \frac{a+b+c}{2} \cdot \rho$ mit ρ, als Innenkreisradius und
Sinussatz: $\frac{a}{sin\ \alpha} = \frac{c}{sin\ \gamma}$ als auch ein Additionstheorem $sin\ 2\beta = 2 \cdot sin\ \beta \cdot cos\ \beta$.

Wie lang sind die Dreiecksseiten a und b, falls r = 4 cm?

Antworttyp: $\mathbb{R}(1);\mathbb{R}(1)$

Aufgabe 2.2: Alice im Rätselland

„Nun denn,“ sagte der König, „wie ich schon gesagt habe, haben die Ritter in diesem Land immer die Wahrheit gesagt, sie haben nie gelogen, und die Schurken in diesem Land haben immer gelogen und niemals die Wahrheit gesagt. Eines Tages entstand große Aufregung in dem Land, weil bekanntgeworden war, dass ein Spion aus einem anderen Land die Grenzen überschritten hatte.“
„Woher wusste man das?“, fragte Alice, die ihren Entschluss völlig vergessen hatte.
„Dazu fällt mir nichts ein“, antwortete der König, „und das wird sich auch als sehr unwichtig erweisen, was das eigentliche Problem betrifft!“
„War der Spion ein Lügner oder sagte er die Wahrheit?“, fragte Alice.
„Ah, genau das macht die Sache kompliziert!“, antwortete der König.
„Der Spion war weder ein Ritter noch ein Schurke. Manchmal sagte er die Wahrheit und manchmal log er – er machte immer das, was ihm gerade am besten passte.“
Man wusste, dass der Spion mit zwei anderen Einwohnern des Landes zusammenlebte und dass einer der beiden ein Ritter und der andere ein Schurke war. Eines Tages verhafteten die Polizeibeamten alle drei, aber sie wussten nicht, wer der Ritter, wer der Schurke und wer der Spion war. Wir wollen diese drei A, B und C nennen.
Bei der Vernehmung behauptete A, dass C ein Schurke sei, und B behauptete, dass A ein Ritter sei. Dann wurde C gefragt, wer er sei, und C antwortete: „Ich bin ein Spion.“
Wer war der Ritter, wer war der Schurke?

Lösungstyp:
$Wort(1);Wort(1)$

Aufgabe 2.3: Dreistellige Zahlen

Betrachte dreistellige Zahlen, deren mittlere Ziffer die einzige 0 der Zahl ist. Drei davon haben die Eigenschaft, dass die zweistellige Zahl aus der ersten und der dritten Ziffer (ohne die Null) Teiler der dreistelligen Zahl ist.
(307 gehört nicht zu den zu betrachtenden Zahlen, da 37 nicht Teiler von 307 ist.)
Wie groß ist die Summe der drei Zahlen?

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 2.4: Pizza-Konkurrenz

Erin's Pizza (EP) and Lino's Pizza (LP) are located next door to each other. Each day, each of 100 customers buys one whole pizza from one of the restaurants. The price of a pizza at each restaurant is set each day and is always a multiple of 10 cents. If the two restaurants charge the same price, half of the 100 customers will go to each restaurant. For every 10 cents that one restaurant's price is higher than the other restaurant's price, it loses one customer to the other restaurant. The cost for each restaurant to make a pizza is \$5.00. As an example, if EP charges \$8.00 per pizza and LP charges \$9.00 per pizza, the number of customers and the resulting profit for each restaurant is shown in the table below.

Restaurant	Price per Pizza	Number of customers	Profit
EP	8 Euro	50+10 = 60	60x(8-5)=180
LP	9 Euro	50-10 = 40	40x(9-5)=160

EP sets its price first and then LP sets its price. On Tuesday, EP charges \$7.20 per pizza.

(a) What should LP's price be in order to maximize its profit?

(b) What should LP's price be to maximize his profit but minimize EP's profit.
(maximize LP's profit - EP's profit)

(c) What should EP' price be in the first place to allow LP only less or equal profit?

(d) LP now maximizes its profit. What's the positive differenz between LP and EP?

Lösungstyp:
$\mathbb{R}(2); \mathbb{R}(2); \mathbb{R}(2); \mathbb{R}(2)$

Aufgabe 2.5: Dreiecksseiten & Höhen

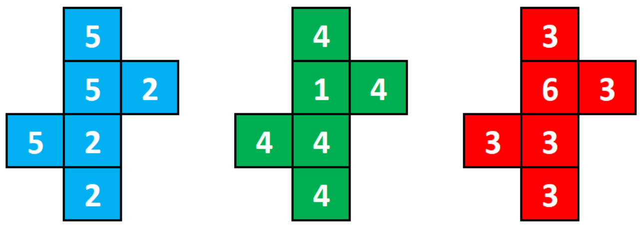
In einem Dreieck seien die Höhen mit h_a, h_b, h_c, der Inkreisradius mit r, der Umkreisradius mit R bezeichnet.

Bekannt seien die dazugehörigen Formeln: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R = \frac{abc}{A}$
sowie $2 \cdot A = r(a+b+c) = a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c$.

Für die Fälle, dass $a:b:c = 1:1:1$ als auch $a:b:c = 3:4:5$, sind die x-Werte in der folgenden Gleichung zu bestimmen: $h_a + h_b + h_c = \boldsymbol{x} \cdot r$.

Lösungstyp: $\mathbb{N};\mathbb{Q}$

Aufgabe 2.6: Zwei Würfel

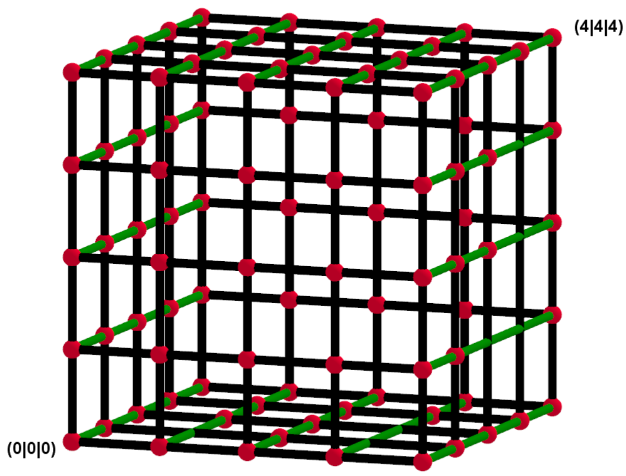


Klaus, Gerda und Joachim spielen mit drei Würfeln (blau, grün, rot; siehe rechts). Bei einem Duell treten zwei unterschiedliche Würfel gegeneinander an und es gewinnt derjenige, der die höhere Augenzahl würfelt. Sie stellen fest, dass die Verteilung der Siege blau:grün=7:5; grün:rot=25:11 und rot:blau=7:5 lauten, was sie sehr erstaunt.
Nun benutzen sie bei jedem Wurf immer zwei Würfel gleicher Farbe und es gewinnt wieder derjenige mit der höheren Summe.
Wie sieht da die Verteilung aus (bb:gg; gg:rr;rr:bb) ?

Antworttyp: $\mathbb{N}:\mathbb{N};\mathbb{N}:\mathbb{N};\mathbb{N}:\mathbb{N}$

Aufgabe 2.7: Pathfinder

Ein 4x4x4-Hexaeder besitzt sechs Seitenflächen mit 4x4-Einheitsquadraten. Eine Ecke des Hexaeders sei der Startpunkt (0|0|0) eines Ameisenweges, der immer durch Punkte mit ganzzahligen positiven Koordinatenwerten führt und jedesmal in positiver Richtung einzuschlagen ist. Die Ameise bewegt sich nur auf der Oberfläche des 4x4x4-Hexaeders. Mit jedem Schritt wird genau ein Koordinatenwert um 1 vergrößert.
Wie viele unterschiedliche Wege gibt es für die Ameise?



Antworttyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 2.8: Walter White

Walther White ist gerne als Austauschlehrer in Österreich, denn dort wird er mit „Professor“ angeredet, und das hört er gerne. Am liebsten führt er Versuche vor.
Diesmal hat er ein Glas mit 100 ml Wasser vor sich. Drei Schüler haben Gläser gleicher Größe mit Milch vor sich, einmal mit 1%, einmal mit 2% und einmal mit 3% Fett. Der Professor kippt 25 ml Wasser aus seinem Glas reinen Wassers in Claudias Milchglas, sie rührt gut um. Dann kippt Claudia aus ihrem Glas 25 ml in Detlefs Glas, der wiederum umrührt. Detlef kippt ebenso 25 ml in Elizas Glas, und dann kippt Eliza 25 ml in das Glas des Professors, so dass am Ende alle wieder 100 ml haben.
Der Professor stellt plötzlich fest, dass er vergessen hatte, vorher zu klären, welcher Schüler welches Glas vor sich hatte. Dafür misst er nun den Fettgehalt in seinem Glas nach dem Mischen: Genau $0,656\%$.
Um die Aufgabe ein wenig einfacher zu gestalten, soll das spezifische Gewicht unabhängig von der Fettmenge der Milch gleich dem des Wassers sein.
Gefragt ist nach dem Verhältnis des Fettgehaltes am Ende des Versuchs?
(1. Schüler : 2. Schüler : 3. Schüler : Professor White)

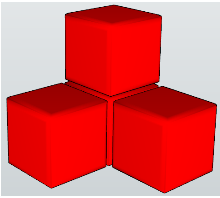
Lösungstyp: $\mathbb{N}:\mathbb{N}:\mathbb{N}:\mathbb{N}$

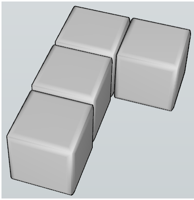
Aufgabe 2.9: Rubik-Cube

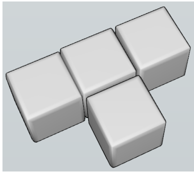
Gegeben seien 125 kleine zueinander kongruente Würfel Diese werden zu einem 5x5x5-Würfel zusammengesetzt. Jede Seitenfläche wird von außen mit paarweise verschiedenen Farben angemalt.
Stelle fest, wie viele verschiedene außen vollständig gefärbte 5x5x5 Würfel sich aus den 125 Würfeln zusammensetzen lassen, die sich nur durch die Färbungen unterscheiden.
Wie viele Nullen besitzt diese Zahl am Ende?

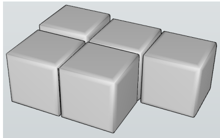
Lösungstyp: $\mathbb{N}$

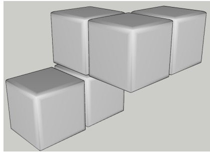
Aufgabe 2.10: Never ever cube

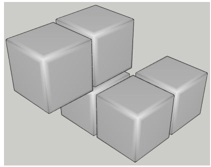

&

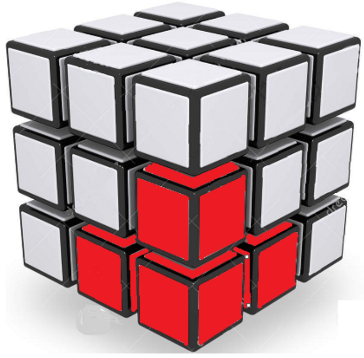

2


3


a


n


o



Gegeben seien die obigen sechs kleinen aus Einheitswürfeln gebauten Gebilde. (Wer keine kleinen Steckwürfel hat, kann diese Gebilde auch aus Papier nachbauen.)
Diese sechs Gebilde sollen so zusammengebaut werden, dass ein 3x3x3-Würfel entsteht.
Wenn der 3x3-Würfel fertig gebaut ist, wird er so auf die Tischfläche gestellt, dass das rote &-Gebilde rechts unten zu liegen kommt.

Nun soll die Raumdiagonale durch den roten &-Baustein betrachtet werden. Gesucht sind die drei Buchstaben (beginnend mit &, deren Bausteine auf der Diagonalen liegen).

Lösungstyp: *Wort*(3)

Wenn jede teilnehmende Schule uns fünf bis zehn Euro spendete, wäre uns sehr geholfen.
Stichwort *Mathenacht*
Kontoinhaber: MaWeSH e.V.
Kreditinstitut: Sparkasse Lübeck
IBAN: DE 18 2305 0101 0160 0413 56